

# Grundlegende Verfahren und Techniken

## Transformationen und Koordinatensysteme

1. Es gilt

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i X_i = \left( \frac{\sum_{i=1}^n \mathbf{x}_i}{\sum_{i=1}^n \lambda_i} \right).$$

falls die Punkte gegeben sind durch  $X_i = (\mathbf{x}_i, 1)^T$ . Für  $\sum \lambda_i = 1$  erhält man einen Punkt für die affine Kombination. Ist die Summe  $\sum \lambda_i = 0$ , dann ist das Ergebnis ein Vektor. Hat die Summe einen Wert  $\sum \lambda_i \neq 0$ , dann kann durch diesen Wert dividiert werden; das Ergebnis ist ein Punkt.

2. Die Polygonzüge  $A$  und  $B$  und die gesuchten Lösungen:

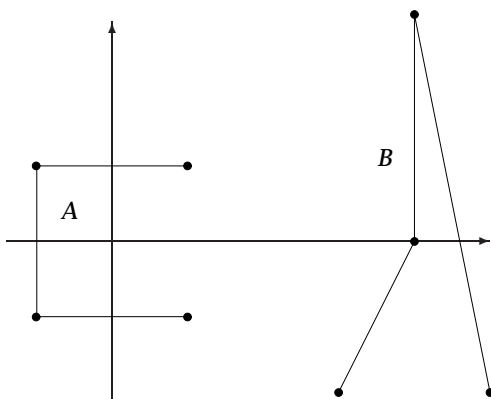


Abbildung 1: Die Polygonzüge  $A$  und  $B$

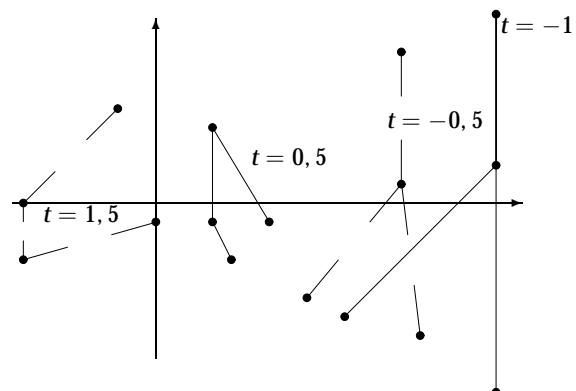


Abbildung 2: Die Polygonzüge  $tA + (1 - t)B$

3. Durch eine Koordinatentransformation wird die Gerade durch den Ursprung auf die  $x$ -Achse abgebildet; dann die Reflexion durchgeführt und anschließend wieder die Koordinatentransformation rückgängig gemacht. Die Koordinatentransformation beschreiben wir durch die beiden Winkel  $\varphi$  und  $\theta$ .  $\varphi$  beschreibt den Winkel zwischen der  $x$ -Achse und der Achse in der  $xy$ -Ebene,  $\theta$  den Winkel zwischen  $x$ -Achse und der Achse in der  $xz$ -Ebene. Dann ist die allgemeine Reflexion an einer Achse gegeben durch  $R_y(-\theta)R_z(\varphi)Ref_xR_z(-\varphi)R_y(-\theta)$ :

$$Ref = \begin{pmatrix} \cos \theta^2 \cos 2\varphi - \sin \theta^2 & \cos \theta \sin 2\varphi & -\sin 2\theta \sin \varphi^2 \\ \cos \theta \sin 2\varphi & -\cos 2\varphi & \sin \theta \sin 2\varphi \\ -\sin 2\theta \sin \varphi^2 & \sin \theta \sin 2\varphi & \cos \theta^2 + \sin \theta^2 \cos 2\varphi \end{pmatrix}$$

Setzen Sie  $\theta = \varphi = 0$ , dann erhalten Sie  $Ref_x$  zurück. Interessant ist der Fall  $\theta = 0$ , einer

Reflexion an einer Achse in der  $xz$ -Ebene:

$$Ref_{\theta=0} = \begin{pmatrix} \cos 2\varphi & \sin 2\varphi & 0 \\ \sin 2\varphi & -\cos 2\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4. Analog zur letzten Aufgaben wird wieder die Drehachse durch die beiden Winkel  $\varphi, \theta$  beschrieben. Dann ist die allgemeine Rotation mit Winkel  $\beta$  gegeben durch

$$R_y(-\theta)R_z(\varphi)R_x(\beta)R_z(-\varphi)R_y(-\theta).$$

Im Buch auf Seite 20 müssen Sie noch die Koordinaten der Drehachsen durch den Vektor  $(\cos \theta \cos \varphi, \sin \varphi, \cos \varphi \sin \theta)^T$  ersetzen. Haben Sie sich dazu entschieden, die Drehachse auf die  $y$  oder  $z$ -Achse zu drehen, ergibt sich ein anderer Ausdruck, aber das gleiche Endergebnis.

5. Das Auto unterscheidet sich vom Fahrrad auf Seite 24 grob durch die Anzahl der Räder. Beim Propellerflugzeug kommen zu den beiden Vorderrädern ein Hinterrad und der Propeller hinzu.

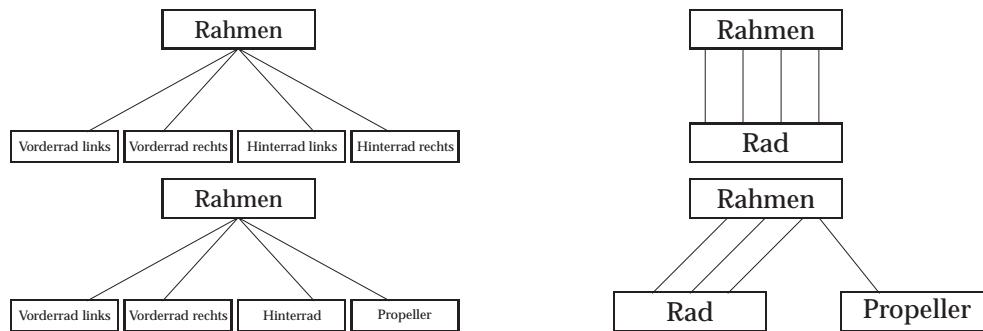


Abbildung 3: Ein Auto (oben) und ein Propellerflugzeug (unten) als Baum und als gerichteter azyklischer Graph

## Projektionen und Kameramodelle

- .
- Das Ergebnis stimmt mit der Abbildung 2.25 auf Seite 29 überein.
- Die Kavaliers- und Kabinettprojektion mit  $\alpha = 60^\circ$  finden Sie in Abbildung 4.



Abbildung 4: Die Kabinett- (links) und Kavalierprojektion mit  $\alpha = 60^\circ$

4. Das grafische Ergebnis sehen sie in Abbildung 5. Die Matrizen sind

$$P_{parallel} = \begin{pmatrix} -0,7071 & 0 & 0,7071 & 0 \\ -0,3015 & 0,9045 & -0,3015 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und

$$P_{persp} = \begin{pmatrix} 3,3166 & 0 & -3,3166 & 0 \\ -1,4142 & 4,2426 & -1,4142 & -4,2426 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0,6396 & -0,4264 & -0,6396 & 5,11682 \end{pmatrix}$$



**Abbildung 5:** Die Parallel- (links) und Zentralprojektion für Aufgabe 4

5. Die Projektion der Geraden ist gegeben durch

$$X_u^*(\lambda) = d \frac{A_u + \lambda c_u}{-A_n - \lambda c_n}, X_v^*(\lambda) = d \frac{A_v + \lambda c_v}{-A_n - \lambda c_n}.$$

Für den Fall  $c_n = 0$  ergibt dies die parametrische Form einer Geraden in der Bildebene mit Steigung  $\frac{c_v}{c_u}$ :

$$\frac{d}{-A_n} (A_u + \lambda c_u, A_v + \lambda c_v).$$

Dieses Bild ist unabhängig von der Position der Geraden, es kommt immer die gleiche Steigung heraus.

Für den Fall  $c_n \neq 0$  müssen wir den Grenzwert  $\lambda \rightarrow \infty$  betrachten. Es ist

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} = d \left( -\frac{c_u}{c_n}, -\frac{c_v}{c_n} \right).$$

Der Fluchtpunkt hänge nur vom Richtungsvektor ab! Also haben parallele Geraden alle den gleichen Fluchtpunkt.

## Clipping und Rasterung

1. .

## Sichtbarkeit

1. .

## Fallstudien

1. .

## **Affine Transformationen und Hierarchien in OpenGL**

Finden Sie bei den Quelltexten dieses Kapitels

## **Hierarchien in VRML und AliasWavefront MAYA**

Finden Sie bei den Quelltexten dieses Kapitels

## **Kameras in OpenGL**

Finden Sie bei den Quelltexten dieses Kapitels