Geometrisches Modellieren mit Kurven und Flächen

Parameterkurven

1. Alle Kurvenstücke sind linear; als Bild ergibt sich Abbildung 6.

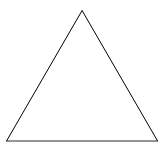

Abbildung 6: Die Lösung der Aufgabe 1

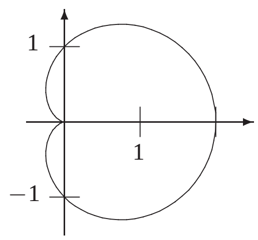

Abbildung 7: Die Kardioide, die Lösung der Aufgabe 3

2. Die Punkte $(x(t), y(t))$ liegen alle auf einem Kreis; denn es ist $x(t)^2 + y(t)^2 = a^2$. Dann ist auch klar, dass der Ursprung der Mittelpunkt ist, der Radius ist a.
3. Die Lösung ist die *Kardioide* in Abbildung 7. Die Kardioide ist der geometrische Ort, der von einem Punkt eines Kreises von Radius $2a$ beschrieben wird, der ohne zu gleiten auf einem anderen Kreis vom Radius $2a$ rollt. In der Aufgabe war $a = \frac{1}{2}$. Als Bogenlänge ergibt das Integral den Wert 8.
4. Die Tangenten für eine Ellipse mit den Radien R_1, R_2 sind gegeben durch
$$\mathbf{t}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ R_2 \end{pmatrix}, \mathbf{t}_{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{2}\begin{pmatrix} -R_1 \\ R_2 \end{pmatrix}, \mathbf{t}_{\frac{\pi}{2}} = \begin{pmatrix} -R_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{t}_{\pi} = \begin{pmatrix} 0 \\ -R_2 \end{pmatrix}.$$
Die Skizze sehen Sie in Abbildung 8.

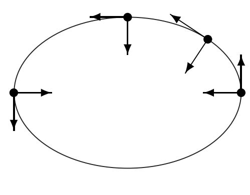

Abbildung 8: Die Ellipse, Tangenten und Normalen für Aufgabe 4

5. Die Lösung ist die Lemniskate von Gerono; die Skizze sehen Sie in Abbildung 9. Die Krümmung κ_2 ist gegeben durch
$$\kappa_2(t) = \frac{-4\cos^2 t \sin t + \sin t\left(\cos^2 t - \sin^2 t\right)}{\left(\cos^2 t + (\cos^2 t - \sin^2 t)^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

Abbildung 10 zeigt den Verlauf der Krümmung. Die Bogenlänge ist durch das Integral gegeben durch $6,09722$.

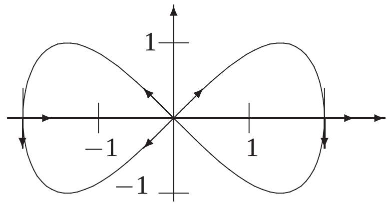

Abbildung 9: Die Lemniskate von Gerono als Lösung der Aufgabe 5

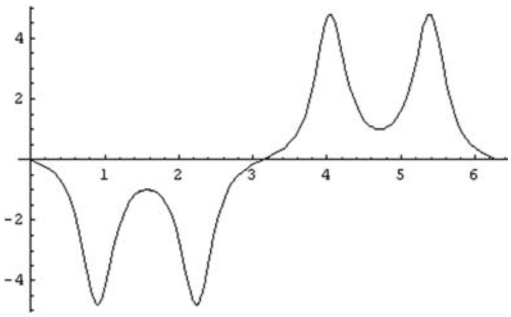

Abbildung 10: Die Krümmung κ_2 der Lemniskate von Gerono

.

Die Tangenten und Normalen finden Sie in der Abbildung 9 und in Tabelle 1.

Parameterwerte	$t = 0$	$t = \frac{\pi}{2}$	$t = \pi$	$t = \frac{3\pi}{2}$	$t = 2\pi$
Tangenten	$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
Normalen	$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Tabelle 1: Die unnormalisierten Tangenten und Normalen an die Lemniskate

Die Ellipse in Abbildung 8 ist gegeben als der geometrische Ort der Punkte, für die die Summe der Abstände zu zwei gegebenen Brennpunkten F_1 und F_2 konstant ist. Die Lemniskate von Bernoulli ist gegeben geometrischer Ort aller Punkte, für die das Produkt der Abstände zu den Brennpunkten konstant ist. Allgemein ist eine Lemniskate von Bernoulli gegeben durch die Parameterdarstellung

$$K_a(t) = \left(\frac{a \cos t}{1 + \sin t^2}, \frac{a \sin t \cos t}{1 + \sin t^2} \right).$$

Dabei liegen die beiden Brennpunkte dann in $(\pm a\sqrt{2}, 0)$.

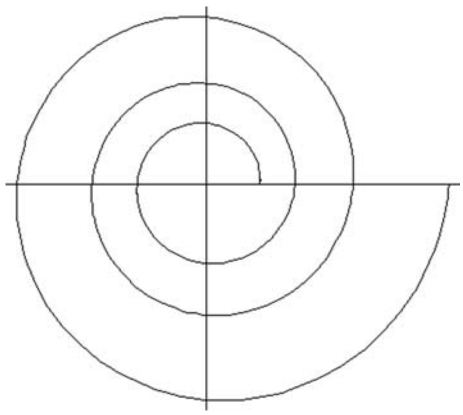

Abbildung 11: Die logarithmische Spirale im Parameterintervall $[0; 6\pi]$

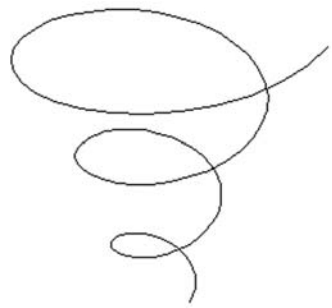

Abbildung 12: Die Schraubenlinie für die logarithmische Spirale im Parameterintervall $[0; 6\pi]$

6. Eine grafische Darstellung der logarithmischen Spirale $(ae^{bt}\cos t, ae^{bt}\sin t)$ sehen Sie in Abbildung 11; die Schraubenlinie darüber ist durch $(ae^{bt}\cos t, ae^{bt}\sin t, ct)$ gegeben; ihr Bild finden Sie in Abbildung 12. Für das Frenet'sche Bezugssystem ergibt sich:

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}(t) &= \frac{1}{\sqrt{c^2 + a^2(1+b^2)e^{2bt}}}\begin{pmatrix} ae^{bt}(b\cos t - \sin t) \\ ae^{bt}(\cos t + b\sin t) \\ c \end{pmatrix}, \\
\mathbf{b}(t) &= \frac{1}{(1+b)\sqrt{c^2 + a^2e^{2bt}}}\begin{pmatrix} -c(2b\cos t + (b^2-1)\sin t) \\ c((b^2-1)\cos t - 2b\sin t) \\ a(1+b^2)e^{bt} \end{pmatrix}, \\
\mathbf{n}(t) &= \mathbf{b} \times \mathbf{v}.
\end{aligned}$$

Polynomiale Kurven

1. Die Kurve ist eine Parabel, denn die Diskriminante ist Null. In Abbildung 13 sehen Sie ein Skizze.

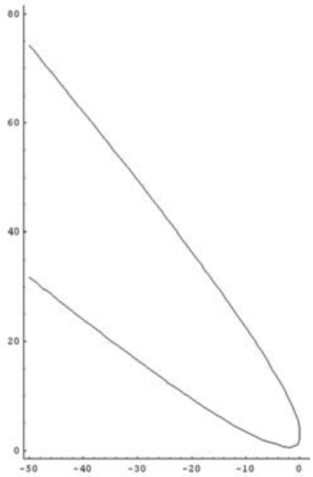

Abbildung 13: Der Kegelschnitt zu Aufgabe 1

2. Die Formel kann geschrieben werden als $\sum_{i=1}^{3} \lambda_i P_i$, dabei sind die Koeffizienten gegeben durch

$$\lambda_1 = \frac{(1-t)^2}{(1-t)^2 + 2wt(1-t) + t^2}, \ \lambda_2 = \frac{2wt(1-t)}{(1-t)^2 + 2wt(1-t) + t^2}, \ \lambda_2 = \frac{t^2}{(1-t)^2 + 2wt(1-t) + t^2}.$$

Diese addieren sich offensichtlich zu 1 auf.

3. Das Gewicht ist für alle drei Kurvenstücke immer $w = \cos 60^\circ = 0,5$.

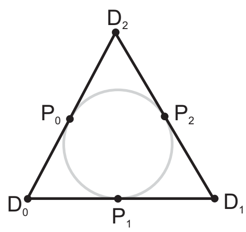

Abbildung 14: Der Kreis als rationale Kurve mit den Kontrollpunkten

Die Segmente ergeben sich durch die folgenden Kontrollpunkte:

- P_0, D_2 und P_2, erstreckt sich von P_0 bis P_2;
- P_2, D_1 und P_1, erstreckt sich von P_2 bis P_1;
- P_1, D_0 und P_0, erstreckt sich von P_1 bis P_0.

Für das Dreieck ist jedes gleichwinklige Dreieck zu verwenden. Eine mögliche Wahl für das Dreieck ist $D_0 = (0,0)$, $D_1 = (1,0)$ und $D_2 = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$. Wenn Sie an den Punkten P_i jeweils die Tangenten und Krümmungen bestimmen, dann erkennen Sie, dass der mit den rationalen Polynomen dargestellte Kreis nur C^1- bzw. G^1-stetig ist. Und er ist nicht nach seiner Bogenlänge parametrisiert!

4. .